**第 4节 容斥原理（解析版）**

第三章 数学问题
本题库配套信息学奥赛一本通（初赛真题解析）第138页-第139页真题在线评测。
本套题目共5题，满分25分，配合书本学习，事半功倍。

您的姓名： [填空题] \*

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

一、单项选择和填空题（共5题，每题5分，共计25分;每题有且仅有一个正确选项）

1.—次期末考试，某班有 15 人数学得满分，有 12 人语文得满分，并且有 4 人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？（）。 [单选题] \*

|  |
| --- |
| A. 23(正确答案) |
| B. 21 |
| C. 20 |
| D. 22 |

**答案解析：**由容斥原理可以得知，答案为 15 + 12 - 4 = 23

2.在1和2015之间(包括1和2015在内)不能被4、5、6三个数任意一个数整除的数有\_\_\_\_\_\_\_\_\_个。 [填空题] \*

空1答案：1075

**答案解析：**本题采用容斥原理求解，首先不能被 4，5，6 三个数任意一个数整除的数 = 所有数- 能被 4，5，6 三个数任意一个数整除的数，设 f(i) 表示 n 以内能被 i 整除的数的个数， f(i) = n / i。 所以 ans = 2015 - f(4) - f(5) - f(6) + f(20) + f(12) + f(30) - f(60) = 1075

3.某班有50名学生，每位学生发一张调查卡，上写a，b，c三本书的书名，将读过的书打√，结果统计数字如下： 只读a者8人；只读b者4人；只读c者3人；全部读过的有2人；读过a，b两本书的有4人；读过a，c两本书的有2人；读过b，c两本书的有3人；

(1)读过a的人数是 \_\_\_人 。（备注：只填数字）。         (2)一本书也没有读过的人数是 \_\_\_人。（备注：只填数字）。 [填空题] \*

空1答案：12

空2答案：30

**答案解析：**如图可清晰的看到结果，比抽象推理更容易避免重复诸或丢失数据。读过 a 的人数是 8 + 2 + 2 = 12，一本书也没有读过的人数是 50 - 8 - 2 - 2 - 4 - 1 - 3 = 30。

4.在书架上放有编号为1 ，2 ，．．．，n的n本书。现将n本书全部取下然后再放回去，当放回去时要求每本书都不能放在原来的位置上。

例如：n = 3时：原来位置为：1 2 3

放回去时只能为：3 1 2 或 2 3 1 这两种

问题：求当n = 5时满足以上条件的放法共有\_\_\_种？(不用列出每种放法) [填空题] \*

空1答案：44

**答案解析：**F(n) = (n-1) \* (F(n-1)+F(n-2);

F(1) = 0;

F(2) = 1;

F(3) = 2 \* (0+1) = 2;

F(4) = 3 \* (2+1) = 9;

F(5) = 4 \* (F(4) + F(3)) = 44.

5.重新排列 1234 使得每一个数字都不在原来的位置上，一共有 \_\_\_\_\_\_\_\_\_种排法。 [填空题] \*

空1答案：9

**答案解析：**【分析 1】只有 4 个数，可以采用手工枚举的方式。

2341  2143  2413  3142  3412  3421  4123  4312  4321 因此答案是 9

【分析 2】：这是错排类问题。n个不同元素的一个错排可由下述两个步骤完成:
第一步，“错排”1号元素(将1号元素排在第2至第n个位置之一)，有n-1种方法。

第二步，“错排”其余n-1个元素，按如下顺序进行。视第一步的结果，若1号元素落在第k个位置，第二步就先把k号元素“错排”好,k号元素的不同排法将导致两类不同的情况发生:1、k号元素排在第1个位置，留下的n-2个元素在与它们的编号集相等的位置集上“错排”，有 f(n-2) 种方法;2、k号元素不排第1个位置,这时可将第1个位置“看成”第k个位置(也就是说本来准备放到k位置为元素，可以放到1位置中)，于是形成(包括k号元素在内的)n-1个元素的“错排”，有f(n-1)种方法。据加法原理，完成第二步共有f(n-2)+f(n-1)种方法。根据乘法原理，n个不同元素的错排种数f(n)= (n-1) [f(n- 2) +f(n-1)](n>2)。

假设有n封信，第一封信可放在(2~n)任一个信封里，共 n-1 种放法，设第一封信放在了第 k 个信封里，若此时第k封信放在了第 1 个信封里，则只要将剩下的 n-2 错排，即f(n-2)，若第k封信没有放在了第1个信封里，可将第1封信的位置看成是“第k个位置”，即将n-1封信错排，即为f(n-1)。由递推可得,f(n)=(n-1) \*[f(n-1)+f(n-2)]，f(1)=0,f(2)=1,f(3)=2,f(4)=9。