**第3节 特殊数列(解析板)**

第三章 数学问题
本题库配套信息学奥赛一本通（初赛真题解析）第134页-第135页真题在线评测。
本套题目共4题，满分20分，配合书本学习，事半功倍。

您的姓名： [填空题] \*

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

一、单项选择和填空题（共4题，每题5分，共计20分;每题有且仅有一个正确选项）

1.关于Catalan 数Cn = (2n)! / (n + 1)! / n！，下列说法中错误的是（）。 [单选题] \*

|  |
| --- |
| A. Cn 表示有n + 1 个结点的不同形态的二叉树的个数。(正确答案) |
| B. Cn 表示含n 对括号的合法括号序列的个数。 |
| C. Cn 表示长度为n 的入栈序列对应的合法出栈序列个数。 |
| D. Cn 表示通过连接顶点而将n + 2 边的凸多边形分成三角形的方法个数。 |

**答案解析：**考察 Catalan 数的知识，这句话正确的是 *Cn* 表示有 n 个节点的不同形态二叉树的个数。

如果不了解也不要紧，自己代入算下验证即可。

2.结点数为5的不同形态的二叉树一共有\_\_\_\_\_\_\_\_\_种。(结点数为2的二叉树一共有2种：一种是根结点和左儿子，另一种是根结点和右儿子。) [填空题] \*

空1答案：42

**答案解析：**利用 DP 求解，设 f(i) 表示节点数为 i 的二叉树的形态数， f(i) = ∑*i*−1*k*=0*ƒ* (*k*)×*ƒ* (*i*−*k*+1)，*ƒ* (0)=1 。

这其实就是 Catalan 数，f(0) = 1，f(1) = 1，f(2) = 2，f(3) = 5，f(4) = 14，f(5) = 42。

3.把M个同样的球放到N个同样的袋子里，允许有的袋子空着不放，问共有多少种不同的放置方法？(用K表示)。例如：M = 7，N = 3时，K = 8；在这里认为(5,1,1)和(1,5,1)是同一种放置方法。问：M = 8，N = 5时，K = \_\_\_\_\_\_\_\_\_。 [填空题] \*

空1答案：18

**答案解析：**使用枚举法解决，注意做到不重、不漏网。建议执照有球袋子数分类列举，每种方案严格按照非降排列（省略空袋子）：

1 个有球的袋子：（8）；

2 个有球的袋子：（1,7),(2,6),(3,5),(4,4)

3 个有球的袋子：（1,1,6),(1,2,5),(1,3,4),(2,2,4),(2,3,3)

4 个有球的袋子：  (1,1,1,5),(1,1,2,4),(1,1,3,3),(1,2,2,3),(2,2,2,2)

5 个有球的袋子：（1,1,1,1,4),(1,1,1,2,3),(1,1,2,2,2)

故方案总数为  1 + 4 + 5 + 5 + 3 = 18

4.(子集划分)将n 个数{1，2，…，n}划分成r 个子集。每个数都恰好属于一个子集，任何两个不同的子集没有共同的数，也没有空集。将不同划分方法的总数记为S(n,r)。例如，S(4,2)=7，这7种不同的划分方法依次为{(1),(234)}, {(2),(134)}, {(3),(124)}, {(4),(123)},{(12),(34)}, {(13),(24)}, {(14),(23)}。当n=6,r=3 时，S(6,3)= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。(提示：先固定一个数，对于其余的5 个数考虑S(5,3)与 S(5,2)，再分这两种情况对原固定的数进行分析)。 [填空题] \*

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(答案：90)

**答案解析：**7个球放入 4 个箱子无非是 2+2+2+1 或都者 4+1+1+1 三种情况。所以分别求解再加起来为C(7,1) \* C(6,2) \*C(4,2) \* C(2,2)  / P(3,3) + C(7,3) \* C(4,2)  + C(7,4)