# 信息学奥赛中的数学知识汇总

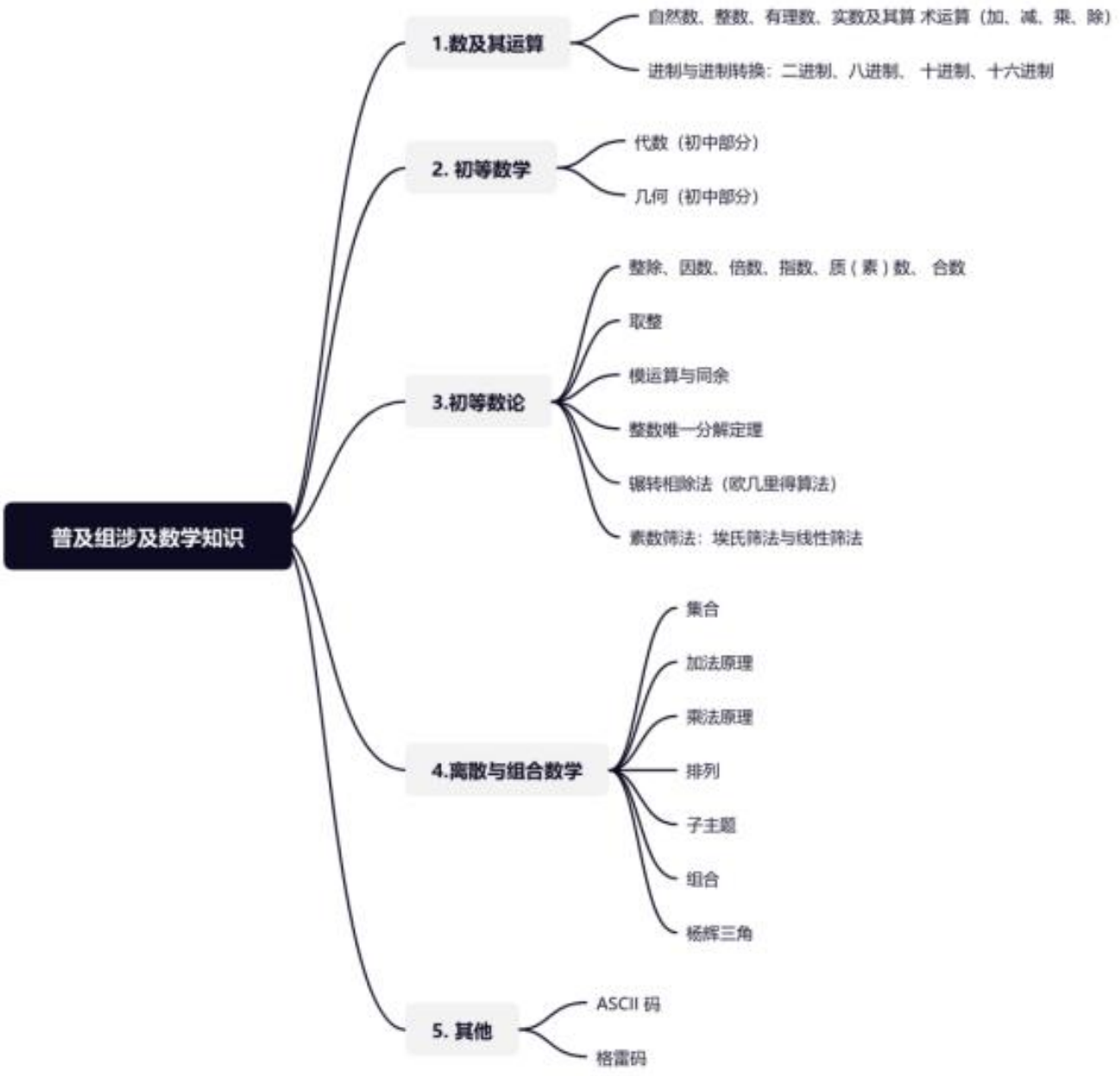
信息学竞赛主要是研究解决问题的算法，编程是帮助把算法写出来的工具。所以编程不只是考察学生对编程语言语法的了解程度，更重要的是以算法和数据结构为核心，运用数学知识构建合适的模型，然后采用计算机程序设计语言（C++）编写程序来解决实际问题的能力。

换而言之，学习信息学竞赛真正考察的能力是算法设计、编程知识和数学知识，这三者缺一不可。

今天根据 NOI2023 大纲给大家总结和梳理普及组、提高组中涉及到的数学知识点，列举 NOI 级别考察的数学知识点，供大家参考，欢迎补充和指正

# 目录

# 一、普及组涉及的数学知识




## 1.1 数及其运算

### 1.1.1 自然数、整数、有理数、实数及其算术运算（加、减、乘、除）

#### 1.1.1.1 自然数

又叫非负整数，是指用以计量事物的件数或表示事物次序的数。即用数码 0，1，2，3，4……所表示的数。自然数由 0 开始，一个接一个，组成一个无穷的集体。自然数有有

序性、无限性。分为偶数和奇数、合数和质数等。

### 1.1.1.2 整数（integer）

整数是正整数、零、负整数的集合。

以 0 为界限，将整数分为三大类：正整数，即大于 0 的整数；零，既不是正整数，也不是负整数，它是介于正整数和负整数的数；负整数，即小于 0 的整数。

注：零和正整数统称自然数。

### 1.1.1.3 有理数

有理数是整数（正整数、0、负整数）和分数的统称。


### 1.1.1.4 有理数的计算

**加法运算：**

同号两数相加，取与加数相同的符号，并把绝对值相加。（绝对值：正数和 0 的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数。）

异号两数相加，若绝对值相等则互为相反数的两数和为 0；若绝对值不相等，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值。（5 和-5 这样，只有符号

不同的两个数叫做互为相反数。）

**减法运算**

减去一个数，等于加上这个数的相反数，即把有理数的减法利用数的相反数变成加法进行运算。

**乘法运算**

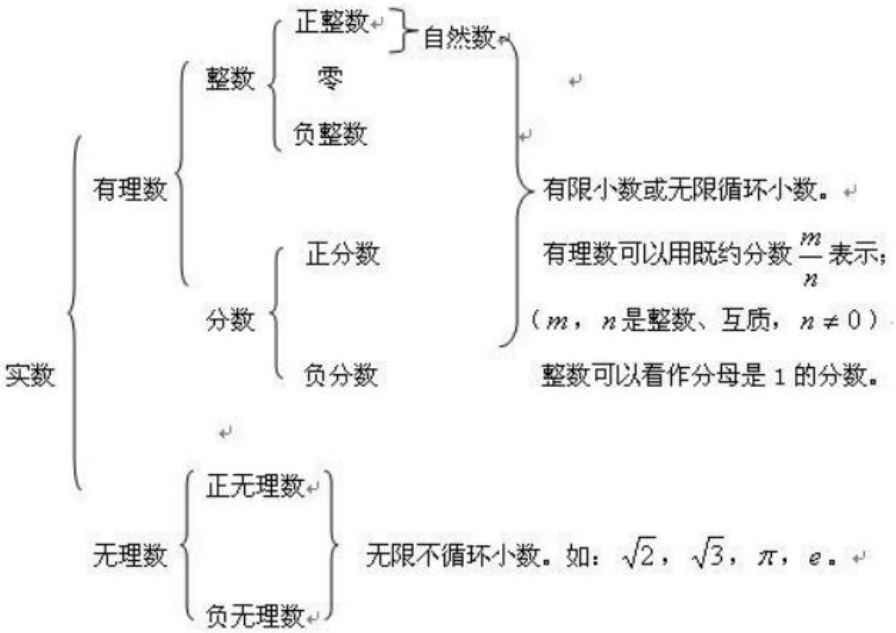
同号得正，异号得负，并把绝对值相乘。

**除法运算**

同号得正，异号得负，并把绝对值相除。

### 1.1.1.5 实数

实数，是有理数和无理数的总称。（有理数可以简单理解为有限小数和无限循环小数的总称；无理数是无限不循环小数）



### 1.1.2 进制与进制转换：二进制、八进制、 十进制、十六进制

四种常用的数制及它们之间的相互转换：

| 进制 | 基数 | 基数个数 | 权 | 进数规律 |
|---|---|---|---|---|
| 十进制 | 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 | 10 | 10i | 逢十进一 |
| 二进制 | 0、1 | 2 | 2i | 逢二进一 |
| 八进制 | 0、1、2、3、4、5、6、7 | 8 | 8i | 逢八进一 |
| 十六进制 | 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、A、B、C、D、E、F | 16 | 16i | 逢十六进一 |

#### 1.1.2.1 进制的标识

方法一：用一个下标来表明

例如：10。十进制真值 10、二进制真值 2、十六进制真值 16、八进制真值 8

方法二：用数值后面加上特定的字母

例如：十进制 10D(D 可省略)、二进制 10B、十六进制 10H、八进制 10O

#### 1.1.2.2 进制转换

十进制数转换为二进制数、八进制数、十六进制数的方法：短除反取余法

二进制数、八进制数、十六进制数转换为十进制数的方法：按权展开求和法

进制间的相互转换：

(1)二进制转十进制

方法：“按权展开求和”

例:(1011.01)2＝(1×23+0×22+1×21+1×20+0×2－1+1×2－2)＝(8＋0＋2＋1＋0＋0.25)＝(11.25)10

规律：个位上的数字的次数是 0，十位上的数字的次数是 1，……，依次递增，而十分位的数字的次数是-1，百分位上数字的次数是-2，……，依次递减。注意：不是任何一个十进制小数都能转换成有限位的二进制数。

⑵十进制转二进制

整数部分：“除以 2 取余，逆序排列”(短除反取余法)

例：(57)10=(111001)2

57÷2=28……1

28÷2=14……0

14÷2=7……0

7÷2=3……1

3÷2=1……1

1÷2=0……1

小数部分：“连续乘以基数 R 后，正取整数。”(乘基(正)取整法。)

例：(0.625)10=(0.101)2

0.625*2=1.25.....取整数部分 1

0.25*2=0.5.....取整数部分 0

0.5*2=1.0.....取整数部分 1

当小数部分为 0 时结束

(3)二进制与八进制和十六进制间转换

十六进制是由 0~15 这些基本数字组成，其中最大的 15 对应的二进制为 1111，所以四位二进制表示一位十六进制。同理三位二进制表示一位八进制。

二进制数转换成八进制数：从小数点开始，整数部分向左、小数部分向右，每 3 位为一组用一位八进制数的数字表示，不足 3 位的要用“0”补足 3 位,就得到一个八进制数.

八进制数转换成二进制数：把每一个八进制数转换成 3 位的二进制数，就得到一个二

进制数。

例：将八进制的 37.416 转换成二进制数：

37．416

011111．100001110

即：(37.416)8＝(11111.10000111)2

例：将二进制的 10110.0011 转换成八进制：

010110.001100

26.14

即：(10110.011)2=(26.14)8

二进制数转换成十六进制数：从小数点开始，整数部分向左、小数部分向右，每 4 位为一组用一位十六进制数的数字表示，不足 4 位的要用“0”补足 4 位，就得到一个十六进制数。

十六进制数转换成二进制数：把每一个十六进制数转换成 4 位的二进制数，就得到一个二进制数。

例：将十六进制数 5DF.9 转换成二进制：

5　　D　　F　．9

0101 1101　1111．1001

即：(5DF.9)16＝(10111011111.1001)2

例：将二进制数 1100001.111 转换成十六进制：

0110　0001．1110

6　　1．E

即：(1100001.111)2＝(61.E)16

注意：以上所说的二进制数均是无符号的数。这些数的范围如下表：

| 无符号位二进制数位数 | 数值范围 | 十六进制范围表示法 |
| --- | --- | --- |
| 8 位二进制数 | 0~255(255=2^8-1) | 00H~FFH |
| 16 位二进制数 | 0~65535(65535=2^16-1) | 0000H~FFFFH |
| 32 位二进制数 | 0~2^32-1 | 00000000H~FFFFFFFFH |

## 1.2. 初等数学

### 1.2.1 代数（初中部分）

#### 1.2.1.1 二次根式

定义：把形如$\sqrt{a}(a \geq 0)$的式子叫做二次根式，$\sqrt{\ }$称为二次根号。正数有两个平方根，把$\sqrt{a}$称为算数平方根，0 只有唯一的平方根 0。例：4 的平方根为 2 和-2，其中 2 是算数平方根。

海伦公式：如果一个三角形的三边长为 a,b,c,记 $p = \frac{a+b+c}{2}$，那么三角形的面积为

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

#### 1.2.1.2 一元二次方程

定义：形如 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$的方程叫一元二次方程。使方程左右两边相等的未知数的值是这个一元二次方程的解（也称根）。

解方程：配方法和公式法。

①配方法：将一个一元二次方程通过配方转化成$(x+n)^2 = p$的形式。若 p>0,方程有两个不等的实数根$x_1 = -n - \sqrt{p}, x_2 = -n + \sqrt{p}$；若 p=0,方程有两个相等的实数根$x_1 = x_2 = -n$；若 p<0，方程无实数根。

②公式法：令$\triangle = b^2 - 4ac$。若△>0，方程有两个不等的实数根$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$；若△=0，方程有两个相等的实数根$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$；若△<0，方程无实数根。

根与系数的关系：$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

③十字相乘法：取$a_1, a_2$为 a 的因子，$c_1, c_2$为 c 的因子，其关系为$a_1 a_2 = a, c_1 c_2 =$

$c, a_1c_2 + a_2c_1 = b$，可配凑出$(a_1x + c_1)(a_2x + c_2) = 0, x_1 = -\frac{c_1}{a_1}, x_2 = -\frac{c_2}{a_2}$。

### 1.2.1.3 二次函数

定义：形如$y = ax^2 + bx + c(a, b, c$ 是常数，$a \neq 0)$的函数，称为二次函数。一般的，二次函数$y = ax^2 + bx + c$ 可以通过配方法化为$y = a(x - h)^2 + k$ 的形式，即$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$。抛物线$y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴是$x=-\frac{b}{2a}$，顶点是$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$。若 a>0，函数图像开口向上，a<0，开口向下。

二次函数和一元二次方程的关系：二次函数$y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的交点坐标为一元二次方程$ax^2 + bx + c=0$ 的解。

### 1.2.1.4 简单三角函数

①正弦。$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$，$\sin 30° = \frac{1}{2}$，$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

②余弦。$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的临边}}{\text{斜边}}$，$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 60° = \frac{1}{2}$

③正切。$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的临边}}$，$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan 45° = 1$，$\tan 60° = \sqrt{3}$

## 1.2.2 几何（初中部分）

### 1.2.2.1 勾股定理

如果直角三角形的两条直角边长为 a,b，斜边长为 c,那么$a^2 + b^2 = c^2$。同样如果三角形的三边长 a,b,c 满足$a^2 + b^2 = c^2$，那么这个三角形是直角三角形。

### 1.2.2.2 圆

在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图

形叫做圆，其固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径，称为 r。周长公式 $C = 2\pi r$，面积 $S = \pi r^2$

## 1.3. 初等数论

### 1.3.1 整除、因数、倍数、指数、质（ 素 ）数、 合数

#### 1.3.1.1 整除

整除的定义：设 $a,b \in Z, a \neq 0$ ，若存在 $q \in Z$ 使得 $b=aq$，那么就说 a 整除 b，记做 $a \mid b$ ，在这种情况下，我们称 a 是 b 的约数（或因数）；否则，就说 a 不整除 b ，记做 $a \nmid b$。

被除数÷除数=商……余数（余数＜除数）

#### 1.3.1.2 整除的性质

**性质 1 整除的加减性**

如果 a、b 都能被 c 整除，那么它们的和与差也能被 c 整除。即 $c \mid a, c \mid b$ ，那么 $c \mid (a \pm b)$。例如 $2 \mid 10, 2 \mid 6$ ,那么 $2 \mid (10 \pm 6)$

被除数加上或者减轻除数的倍数，不影响除数对它的整除性

**性质 2**

如果 b 和 c 的乘积能整除 a，那么 b 与 c 都能整除 a。即 $bc \mid a$ ，那么 $b \mid a$ 且 $c \mid a$

例如 $2*3 \mid 12$ ，则 $2 \mid 12$ 且 $3 \mid 12$

**性质 3 整除的互质可积性**

如果 b 和 c 都能整除 a，且 b 和 c 互质，那么 b 与 c 的乘积能整除 a

即：$b \mid a, c \mid a$ ,gcd(x,y)=1,那么 $bc \mid a$；$2 \mid 28, 7 \mid 28$ ,gcd(2,7)=1,那么$(2*7) \mid 28$

**性质 4 整除的传递性**

如果 c 能整除 b，b 能整除 a，那么 c 能整除 a。即：c|b ,b|a 那么 c|a

例如 3|9 ，9|27 那么 3|27 整除

#### 1.3.1.3 因数/约数

如果 d|a 且 d>=0 则称 d 是 a 的因数 ，因数也可以被称为约数

例如：4|8 ，则称 4 是 8 的因数，或者称 4 是 8 的约数

#### 1.3.1.4 倍数

一个整数能够被另一个整数整除，这个整数就是另一整数的倍数。如 15 能够被 3 或 5 整除，因此 15 是 3 的倍数，也是 5 的倍数。

即：3|15 ，5|15 ，所以 15 是 3 的倍数 ，15 也是 5 的倍数

#### 1.3.1.5 质数

又称素数。一个大于 1 的自然数，除了 1 和它自身外，不能被其他自然数整除的数叫做质数；否则称为合数（规定 1 既不是质数也不是合数）

100 以内的素数：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97

#### 1.3.1.6 质因数 素因数 质因子

质因数就是一个正整数的因数，并且该因数还属于质数的数字。质因数有时也被称为素因数或者质因子。

例如 2 * 3 * 5 =30 这个式子中，2、3、5 是 30 的因数，并且 2、3、5 都是质数，所以 2、3、5 是 30 的质因数

通论 1：存在一个质数 p，若 p|ab，则 p|a 或者 p|b。

通论 2：若 p|a 或者(p,a)=1（p 和 a 的最大公因子为 1），则 p|a2 可以推出 p|a。

通论 3：用π(x)表示不超过 x 的质数的个数，可以证：limπ(x)lnx÷x=1，换种通俗说法就是：1~x 的质数个数大约为 x/lnx（证明时间复杂度时可以用）。

#### 1.3.1.6 合数

除了 1 和它自身外，还可以被其他数整除的数。

例如：4 可以被 2 整除，6 可以被 3 整除

### 1.3.2 取整

只留下整数，正数取整是把小数点去掉

**（1）舍去小数**

例如 正实数

```
float a=1.57;
int b=a;
//此时 b 为 啥去小数取整 b=1
```

例如 负实数

```
float a=-1.57;
int b=a;
//此时 b 为 啥取小数取整 b=-
```

**（2）向下取整**

例如 正实数

```
float a=1.57;
int b=floor(a);;
//此时 b 为 向下取整 b=1
```

例如 负实数

```
float a=-1.57;
int b=floor(a);
//此时 b 为 向下取整 b=-2
```

**（3）向上取整**

例如 正实数

```
float a=1.57;
```

int b=ceil(a);

//此时 b 为 向上取整 b=2

例如 负实数

float a=-1.57;

int b=ceil(a);

//此时 b 为 向上取整 b=-1

**（4）四舍五入**

例如 正实数 入

float a=1.57;

int b=round(a);

//此时 b 为 四舍五入 入 b=2

例如 正实数 舍

float a=1.47;

int b=round(a);

//此时 b 为 四舍五入 啥 b=1

例如 负实数 入

float a=-1.57;

int b=round(a);

//此时 b 为 四舍五入 入 b=-2

例如 负实数 舍

float a=-1.47;

int b=round(a);

//此时 b 为 四舍五入 舍 b=-1

### 1.3.3 模运算与同余

同余是数论中一个重要的概念，常用于处理循环、周期性问题。模运算则是在同余的基础上进行的运算，用于处理大整数取模、快速幂运算等问题。同余与模运算在密码学、离散数学、排列组合等问题中有广泛应用。

模运算，就是取余数，在计算机语言中用%来表示。举个简单的例子，3 % 5 = 3。结果的取值范围在 0 与模之间

例如：c=x/y，c=3 mod 5 =3，c 的取值范围 [0,y-1]，结果也可以用负数表示，即 c=-2

### 1.3.3.1 模运算规则

**（1）交换律**

(a + b) % m = (b + a) % m　　(a * b) % m = (b * a) % m

**（2）结合律**

[(a+b)%m+c]%m = [a+(b+c)%m]%m　　[(a*b)%m*c]%m = [(b*c)%m*a]%m

**（3）分配律**

[(a+b)%m * c] % m = [(a*c)%m + (b*c)%m] % m

(a+b)%m = (a%m + b%m)%m　　(a b)%m = (a%m b%m)%m

(a*b)%m = (a%m * b%m)%m　　a^b % m = (a%m)^b % m

### 1.3.3.2 同余

两个整数除以同一个整数，若得相同余数，则两整数同余。

两个整数 a、b，若它们除以整数 m 所得的余数相等，则称 a 与 b 对于模 m 同余或 a 同余于 b 模 m。记作：a≡b (mod m)，读作：a 同余于 b 模 m，或读作 a 与 b 对模 m 同余，例如 26≡2(mod 12)

### 1.3.3.3 同余的性质

**1.对于同一个除数，两个数的乘积与它们余数的乘积同余。**

例如：201×95 的乘积对于除数 7，与 201÷7 的余数 5 和 95÷7 的余数 4 的乘积 20 对于 7 同余

201×95%7=6　　5*4%7=6

**2.对于同一个除数，如果有两个整数同余，那么它们的差就一定能被这个除数整除。**

例如：519 和 399 对于一个除数同余，那么这个除数一定是 519 与 399 的差的因数，即 519 与 399 的差一定能被这个除数整除

519 和 319 对一个除数 4 同余，519-399=120 ，4 是 120 的一个因数

同理除数 8 也是

**3.对于同一个除数，如果两个数同余，那么他们的乘方仍然同余。**

例如：20 和 29 对于一个除数同余，那么 20 的任何次方都和 29 的相同次方对于这个除数同余，当然余数大小随次方变化

除数 3

20%3=2　　20^3%3=2

29%3=2　　29^3%3=2

**4.对于同一个除数，若三个数 a≡b（mod m），b≡c（mod m），那么 a,b,c 三个数对于除数 m 都同余 （传递性）**

例如：60 和 76 同余于模 8，76 和 204 同余于模 8，那么 60,76,204 都同余于模 8。

**5.对于同一个除数， 若四个数 a≡b（mod m），c≡d（mod m），那么 a±c≡c±d（mod m），（可加减性）**

60 和 76 同余于模 8，76 和 204 同余于模 8，60+76=76+204(mod 8)

因为：136 mod 8 =0，280 mod 8=0，76-60=204-76(mod 8)

因为：16mod 8 =0，128mod 8=0

**6.对于同一个除数， 若四个数 a≡b (mod m)，c≡d (mod m)，那么 ac≡cd (mod**

m），（可乘性）

60 和 76 同余于模 8，76 和 204 同余于模 8，60 * 76 mod 8 =0，76 * 204 mod 8 =0

### 1.3.4 整数唯一分解定理

**唯一分解定理/算数基本定理/质因数分解**

对于任何一个合数 N 都可以拆分成几个质数的乘积的形式：

$$N = P_1^{a1} * P_2^{a2} * P_3^{a3} \cdots * P_k^{ak}$$

Pi 均为质数

N 的因子个数为：

$$因子个数 = (a_1 + 1) * (a_2 + 1) * (a_3 + 1) * \cdots * (a_k + 1)$$

算术基本定理,又称为正整数的唯一分解定理.应用这个定理，我们可以求一个数的因数的个数，也可以求一个数所有因数的和。

**一个大于1的正整数N，如果它的标准分解式为** $N = P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_n^{a_n}$

**那么它的正因数个数为** $\sigma_0(N) = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$

**它的全体正因数之和为**

$$\sigma_1(N) = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{a_2}) \cdots (1 + p_n + p_n^2 + \cdots + p_n^{a_n})$$

### 1.3.5 辗转相除法（欧几里得算法）

欧几里得算法即辗转相除法，可以用来求两个数的最大公约数。算法原理：两个整数的最大公约数等于其中小的那个数跟大除以小余数的最大公约数。

即： gcd(a,b)=gcd(b,a mod b) 。

### 1.3.6 素数筛法：埃氏筛法与线性筛法

#### 1.3.6.1 埃氏筛法

对于于任意一个大于 1 的正整数 n，那么它的 x 倍就是合数（x>1）。利用这个结论，我们可以避免很多次不必要的检测。从小到大考虑每个数，然后同时把当前这个数的所有（比自己大的）倍数记为合数，那么运行结束的时候没有被标记的数就是素数了。显然，要找到直到 n 为止的所有素数，仅对不超过$\sqrt{n}$的素数进行筛选就足够了。

#### 1.3.6.2 线性筛（欧拉筛）

埃氏筛法仍有优化空间，它会将一个合数重复多次标记。线性筛（欧拉筛）解决了这个问题，确保每个合数只被标记一遍，被自己最小的质数筛掉。确保每个数被自己的最小质数筛掉，就是当 x 能被当前的质数整除时 (当前整数就是 x 的最小质数)就结束，这样后面的数（后面所有含有 x 的数不会被当前循环筛掉）就不会被重复筛掉。

## 1.4 离散与组合数学

### 1.4.1 集合

#### 1.4.1.1 什么是集合

数学含义：任何不同的、确定性的元素、无序地，找一个地方聚集在一起形成的一个领地(空间)

判断是不是一个集合：

① 一个集合内的元素：都是不相同的元素，不存在重复的元素

② 一个集合内的元素：全部都是确定性的元素，确定性=可衡量或有范围

③ 一个集合内的元素：所有元素的地位都是相等的，没有位次之分

#### 1.4.1.2 集合之间的关系

交集（∩）：A{ 1,2,3,4,5 } 与 B{ 4,5,6,7,8 }的交集为元素相同的部分，写做：A ∩B = { 4,5 }

并集（∪）： A{ 1,2,3,4,5 } 与 B{ 4,5,6,7,8 }的并集为全部元素，A∪B= {1,2,3,4,5,6,7,8}

补集：存在两种定义，绝对补集与相对补集。

①相对补集：若 A 和 B 是集合，则 A 在 B 中的相对补集是元素属于 B 但不属于 A 的集合。$B-A=\{x|x\in B\text{ 且 }x\notin A\}$。例：A{1,2,3,4,5}与 B{4,5,6,7,8}，A 在 B 中的补集为 B-A={6,7,8}

②绝对补集：若给定全集 U，有 A ⊆U，则 A 在 U 中的相对补集称为 A 的绝对补集（或简称补集），写作$C_uA$。满足 A 是 U 的一个子集，$C_uA$是 U 的一个子集，A 和$C_uA$没有交集。例：A{1,2,3}和 U{1,2,3,4,5}，则$C_uA$={4,5}。

### 1.4.1.3 集合之间的逻辑运算

交换律：A∩B = B∩A；A∪B = B∪A

结合律：A∪(B∪C)=(A∪B)∪C；A∩(B∩C)=(A∩B)∩C

分配对偶率：A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)；A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)

### 1.4.2 加法原理（分类计数原理）

完成一件事，有 n 类办法，如果在第 1 类办法中有$m_1$种不同的方法，在第 2 类办法中有$m_2$种不同的方法，…，在第 n 类办法中有$m_n$种不同的方法，那么完成这件事共有：

N＝$m_1$+$m_2$+……+$m_n$种不同的方法。

### 1.4.3 乘法原理（分步计数原理）

完成一件事，需要分成 n 个步骤，如果做第 1 步有$m_1$种不同的方法，做第 2 步有$m_2$种不同的方法，……，做第 n 步有$m_n$种不同的方法，那么完成这件事共有：N＝$m_1$×$m_2$×…×$m_n$种不同的方法。

两个原理的区别：一个与分类有关，一个与分步有关；加法原理是“分类完成”，乘法原理是“分步完成”

### 1.4.4 排列

①排列：从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个排列。相同的排列是指元素相同且顺序相同。

②排列数：从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的排列数，用符号$A_n^m$表示。

排列数公式：

$A_n^m$=n(n−1)(n−2)…(n−m+1)=$\frac{n!}{(n-m)!}$

③全排列：把 n 个不同的元素全部取出(从 n 个不同的元素中取出 n 个元素)，按照一定的顺序排成一列，叫做 n 个不同的元素的一个全排列，全排列的个数叫做 n 个元素的全排列数，用符号$A_n^n$表示。此时，

$A_n^n$= n(n-1)(n-2)……3・2・1=n!

n!表示正整数 1 到 n 的连乘，叫做 n 的阶乘。规定：0!＝1。

### 1.4.5 组合

（1）组合：从 n 个不同的元素中取出 m(m≤n)个元素并成一组，叫做从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个组合。即不关心被选元素的顺序。记为$C_n^m$。

（2）公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{m!}{m!\ (n-m)\ !}$$

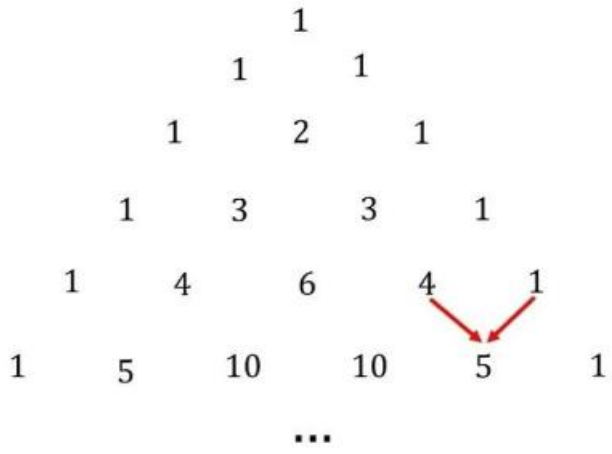
（3）组合数的性质

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$，规定：$C_m^0 = 1$；

(2) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$（从 n+1 个中取出一个 X 余下 n 个，X 不放入 m中则为 C（n,m）,它放入 m 中则为 c(n,m-1)）。

### 1.4.6 杨辉三角

杨辉三角最本质的特征是它的两条斜边都是由数字 1 组成，其余的数等于它“肩”上




的两数之和。

**杨辉三角的用处：**

①二项式展开

在数学上，二项式系数是二项式定理中各项的系数。而二项式系数可排列成杨辉三角，这样可以避免这样的麻烦，直接找到答案。

②斐波那契数列

斐波那契数列是指从 0，1 两个数开始，每一位数始终是前两位的和。这个数列有个神秘的特性，即越往后，相邻两数的比值越来越逼近黄金分割数 0.618 (或 1.618，两数互为倒数)。斐波那契数列和黄金分割数不但在大自然中处处可见，在人类的艺术设计中也是应用非常广泛。

③谢尔宾斯三角形

④高阶等差数列

⑤组合数学

## 1.5. 其他

### 1.5.1ASCII 码

ASCII 码(American Standard Code for Information Interchange)美国标准信息交换代码，现成为世界交换代码标准。

ASCII 码是一种用 8 个比特组成的二进制编码（即一个字节），用于表示 128 个国际

特别要记住:

‘0’的 ASCII 码是 48，‘A’的 ASCII 码是 65，‘a’的 ASCII 码是 97

通用字符。

| 位置 | 分类 | 可见性 |
| --- | --- | --- |
| 0~31，127 | 控制字符或通信专用字符 | N |
| 32 | 空格 | Y/N |
| 33~47，58~64，94~96，126 | 特殊字符（除字母/数字/空格/控制字符外的其他字符） | Y |
| 48~57 | 数字（按大小升序） | Y |

| | | |
|---|---|---|
| 65~90 | 大写字母（按字母表升序） | Y |
| 97~122 | 小写字母（按字母表升序） | Y |

补：$2^8$ =256，$2^7$ = 128，这是因为在 ASCII 码中，把二进制最高位为 0 的数字都称为基本的 ASCII 码，其范围是 0 ~ 127；把二进制最高位为 1 的数字都称为拓展的 ASCII 码，其范围是 0 ~ 256。

补：一个汉字在计算机中占 2 个 Byte。

### 1.5.2 格雷码

#### 1.5.2.1 格雷码定义

格雷码，又叫循环二进制码或反射二进制码，格雷码是我们在工程中常会遇到的一种编码方式，它的基本的特点就是任意两个相邻的代码只有一位二进制数不同，格雷码的基本特点就是任意两个相邻的代码只有一位二进制数不同，这点很重要。典型的二进制格雷码(Binary Gray Code)简称格雷码，因 1953 年公开的弗兰克·格雷(Frank Gray，18870913-19690523）专利“Pulse Code Communication”而得名，当初是为了通信，现在则常用于模拟－数字转换和位置－数字转换中。

而在数字电路中，格雷码每次的变换只会有一个二进制位的跳变，极大地减少了亚稳态的产生，保证电路的稳定性，受到了广泛的应用。

| 十进制 | 格雷码 | 十进制 | 格雷码 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 8 | 1100 |
| 1 | 0001 | 9 | 1101 |
| 2 | 0011 | 10 | 1111 |
| 3 | 0010 | 11 | 1110 |
| 4 | 0110 | 12 | 1010 |
| 5 | 0111 | 13 | 1011 |
| 6 | 0101 | 14 | 1001 |
| 7 | 0100 | 15 | 1000 |

#### 1.5.2.2 格雷码特征

①格雷码属于可靠性编码，是一种错误最小化的编码方式。

②典型格雷码是一种采用绝对编码方式的准权码，其权的绝对值为 2^i-1(设最低位 i=1)。

③格雷码的十进制数奇偶性与其码字中 1 的个数的奇偶性相同。

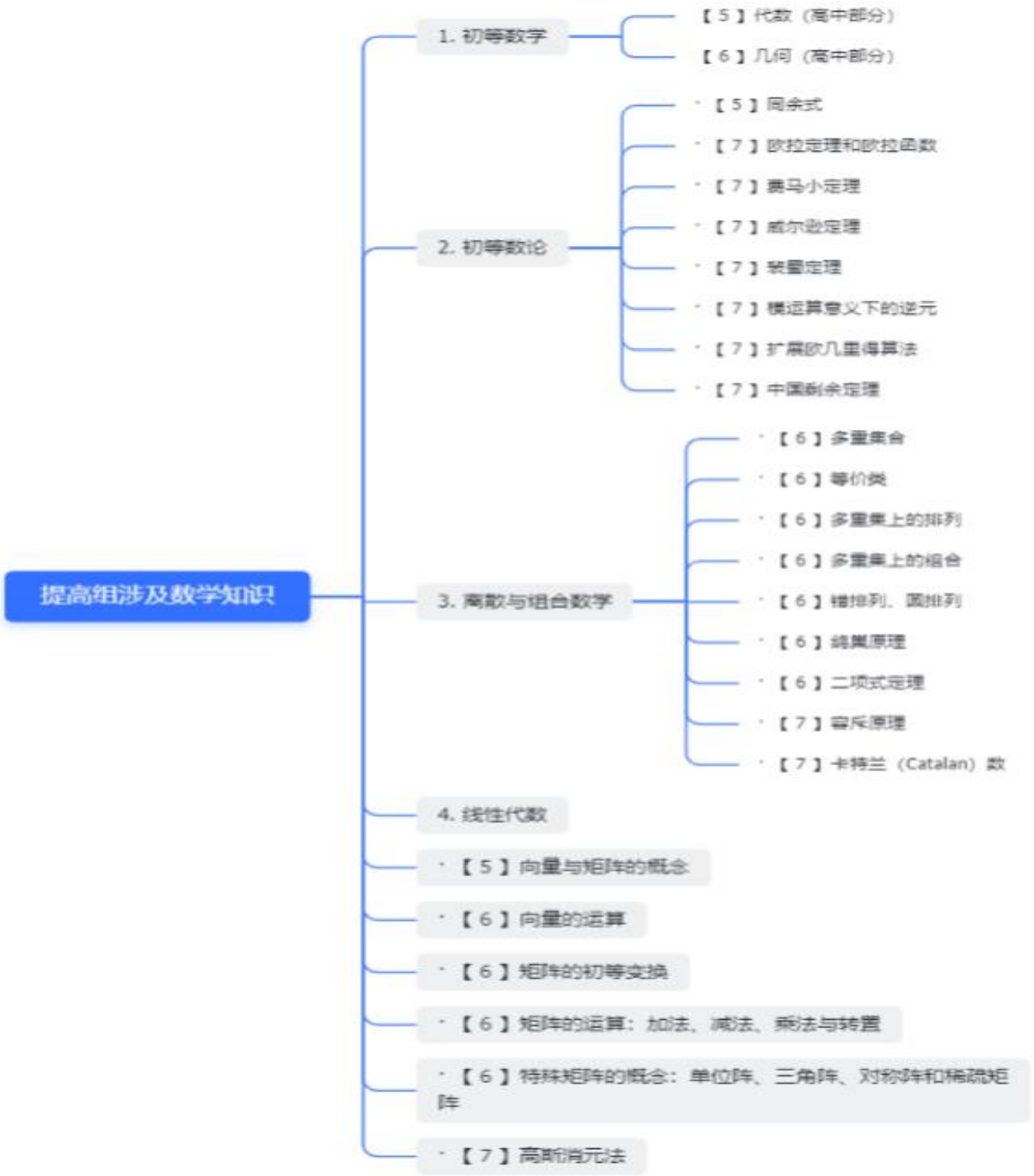
#### 1.5.2.3 二进制码转换成二进制格雷码

二进制码转换成二进制格雷码，其法则是保留二进制码的最高位作为格雷码的最高位，而次高位格雷码为二进制码的高位与次高位相异或。

#### 1.5.2.4 二进制格雷码转换成二进制码

二进制格雷码转换成二进制码,其法则是保留格雷码的最高位作为自然二进制码的最高位，而次高位自然二进制码为高位自然二进制码与次高位格雷码相异或。

# 二、提高组涉及的数学知识




## 2.1. 初等数学

### 2.1.1 代数（高中部分）

①集合与函数、基本初等函数

②概率论

③三角函数及恒等变换

④复数

⑤排列集合

⑥导数

### 2.1.2 几何（高中部分）

①点、直线、平面间的位置关系及判定

②平面向量

③圆锥曲线与方程

④空间向量与立体几何

## 2.2 初等数论

数论中存在一些经典的函数和定理，如欧拉函数、莫比乌斯函数、中国剩余定理等。它们在解决问题中起到重要的作用，常用于解决计数、排列组合、密码学等问题。

### 2.2.1 同余式

同余方程是一类关于模运算的方程，可以用于解决许多问题，包括密码学中的模运算、模反索问题等。

同余式相加：若 a≡b(mod m)，c≡d(mod m)，则 a+c≡b+d(mod m)；

同余式相乘：若 a≡b(mod m)，c≡d(mod m)，则 ac≡bd(mod m)。

线性运算：如果 a ≡ b (mod m)，c ≡ d (mod m)，那么

(1)a ± c ≡ b ± d (mod m)

(2)a * c ≡ b * d (mod m)

幂运算：如果 a ≡ b (mod m)，那么 a^n ≡ b^n (mod m)

### 2.2.2 欧拉定理和欧拉函数

欧拉函数φ ：不超过 n 的且与 n 互质的正整数的个数。

如果 n 为素数 p，则φ(p)=p-1

如果 n 为素数 p 的幂次 pa，则φ(pa)=(p-1)*pa-1.

欧拉函数为积性函数：如果 n 为任意两个互质的数 a、b 的积，则 φ(n)= φ(a)*φ(b)

若 n=p1^a1*p2^a2*……*pk^ak

则φ(n)=n(1-1/p1)(1-1/p2)……(1-1/pk)

欧拉定理(费马小定理的推广)：

$$a^{\phi(m)} \equiv 1(mod\ m)$$

若 a 与 m 互质，则

补充一些同余的性质：

①反身性：a≡a(mod m)

②对称性：若 a≡b(mod m)，则 b≡a(mod m)

③传递性：若 a≡b(mod m)，b≡c(mod m)，则 a≡c(mod m)

④同余式相加：若 a≡b(mod m)，c≡d(mod m)，则 a±c≡b±d(mod m)

⑤同余式相乘：若 a≡b(mod m)，c≡d(mod m)，则 ac≡bd(mod m)

当 p 为质数时，(p－1)!＋1 能被 p 整除

例如 P=5 时，(5-1)!+1=4 * 3 * 2 * 1 +1 =25,25 能被 5 整除

**威尔逊定理 逆定理:若一个数 (p－1)!＋1 能被 p 整除，那么 p 为质数

### 2.2.3 费马小定理

若 p 是素数，a 是整数，且 a 与 p 互质

则：a 的（p-1）次幂被 p 除后余 1

a^(p-1)÷p=q…1

即 a^(p-1)≡1（mod p)

例如:2^10≡1（mod 11）

### 2.2.4 威尔逊定理

当 p 为质数时，(p－1)!＋1 能被 p 整除

例如 P=5 时，(5-1)!+1=4 * 3 * 2 * 1 +1 =25,25 能被 5 整除

**威尔逊定理 逆定理:若一个数 (p－1)!＋1 能被 p 整除，那么 p 为质数

### 2.2.5 裴蜀定理

对于整数 a,b 我们记 gcd(a,b)和 lcm(a,b)为 a,b 的最大公因数和最小公倍数，有时候我们会直接把他们简写为((a,b))和[a,b]。如果 gcd(a,b)，我们称 a,b 互质，也就是说他们没有任何共同的质因数。

它有几个基本的性质，对于正整数$a, b, n$

- $\gcd(a, b) = \gcd(a \pm b, b)$
- $\gcd(na, nb) = n \gcd(a, b)$
- $\gcd(a, b) = \frac{a \cdot b}{\operatorname{lcm}(a,b)}$
- **裴蜀定理**：存在整数 $x, y$ 使得$\gcd(a, b) = ax + by$

### 2.2.6 模运算意义下的逆元

如果两个数 a，b 满足 $a * b \equiv 1 \pmod m$，则称 b 是 a 模 b 下的逆元。

通常表示为 $b = a^{-1} \bmod m$。模运算中，逆元一定存在于模数的范围内，因此逆元必须是正整数。如果逆元为负数，则与模运算的定义不符。因此，模的逆元一定是非负整数。

一般可用辗转相除法，费马小定理，递推法求逆元。

### 2.2.7 扩展欧几里得算法

在数论算法中，扩展欧几里得算法一般用于求解不定方程，同余方程及乘法逆元问题，在算法竞赛中及实际问题求解上有很广泛的应用。算法原理：若 a 和 b 为正整数，则存在整数 x, y 使得 gcd(a,b)=ax+by;

通俗点说就是 gcd(a,b)可以表示为 a,b 的整数线性组合。

(1)求解不定方程;

例题：求 435x + 783y = 87 的一组整数解:

先通过欧几里得算法得:

783 = 1× 435 + 348

435 = 348×1 + 87

348 = 87 × 4

∴ 87 = 435 − 348

87 = 435 − (783 − 435)

87 = (−1)(783) + 2(435)

∴ x = 2, y = −1 是此不定方程的一组整数解。

### 2.2.8 中国剩余定理

中国剩余定理就是用来解模线性方程组的

对于$n_1$，因为它与$n_2n_3\ldots n_k$互质，我们可以找到一个系数$z_1$，使得$z_1n_2n_3\ldots n_k\%n_1=1$。

设$z_1n_2n_3\ldots n_k$为$c_1$。同理，对于每个$n_k$，都可以找到一个$z_i$，使得

$$(z_in_1n_2\ldots n_j|j!=i)\%n_i=1$$

设$(z_in_1n_2\ldots n_j|j!=i)$为$c_i$。

则 $x=b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_kc_k+m(n_1n_2\ldots n_k)$其中 m 为任意整数，为一组解。

## 2.3. 离散与组合数学

### 2.3.1 多重集合

如果 S 是多重集合，那么定义 S 中 n 个对象的无序选择是 S 的 n 组合。（多重组合）

例如， {2a,1b,3c} 一共有 6 个 3 组合：

{2a,1b} , {2a,1c} , {1a,1b,1c} , {1a,2c} , {1b,2c} , {3c}

注意，因为多重集合的无序性，所以 {2a,1b} 和 {1b,2a} 是同一个多重组合。

### 2.3.2 等价类

R 关系是 A 集合上的二元关系，A 集合不为空集，$A \neq \emptyset$，对于 A 集合中的任意 x 元素，

$\forall x \in A$，x 关于 R 关系的等价类是$[x]_R = \{y | y \in A \wedge xRy\}$。

例：集合 A{1，2，3，4，5，8}，R 关系是集合 A 上的模 3 同余关系

$$R = < x, y > | x, y \in A \wedge x \equiv y (\mathrm{mod}\ 3)$$

1 在 R 关系上的等价类是{1，4}

2 在 R 关系上的等价类是{2，5，8}

3 在 R 关系上的等价类是{3}

### 2.3.3 多重集上的排列

对于多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$

全排列 $r = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

全排列数 $N = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

### 2.3.4 多重集上的组合

对于有 N 种元素的多重集 S，选 K 个元素的可行方案数 $C\frac{N-1}{N+K-1}$

### 2.3.5 错排列、圆排列

### 2.3.5.1 错排列

一个人写了 n 封不同的信及相应的 n 个不同的信封，他把这 n 封信都装错了信封，问都装错信封的装法有多少种?

当 n 个编号元素放在 n 个编号位置，元素编号与位置编号各不对应的方法数用 D(n) 表示。D(n)=(n-1)(D(n-1)+D(n-2))

### 2.3.5.2 圆排列

有一组元素，将其排成一个圆，这种排列叫做圆排列或项链排列。一般地，有 m 个元素作圆排列，其方案数的计算公式为(m-1)!

### 2.3.6 鸽巢原理

鸽巢原理也叫抽屉原理.

定理（简单版本鸽巢原理）：f 是一个 X 到 Y 的映射，如果 0<|Y|<|X|则，存在 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$使得$f(x_1) = f(x_2)$。

通俗版本：将 n+1 个球放进 n 个盒子中，则至少有一个盒子不少于两个球

证明：反证法.如果不存在，这样的$x_1, x_2$则 f 是单射，因此

$$|X| \leq |f(X)| \leq |Y|$$

矛盾，证毕

定理（增强版本鸽巢原理）：$f: X \to Y$是一个映射，$|X| = q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1,$

$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，其中$\forall i\le n,q_i$是正整数，则$\exists i\le n,|f^{-1}(y_i)|\ge q_i$

证明：反证法，假设$\forall i,|f^{-1}(y_i)|<q_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n}q_i-n+1=|X|=\sum_{i=1}^{n}|f^{-1}(y_i)|\le\sum_{i=1}^{n}(q_i-1)\Longrightarrow 1\le 0$$

矛盾，证毕

通俗版：有正整数$q_1,q_2,\cdots,q_n$，我们将$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$个球放进 n 个盒子，则要么第一个盒子有$q_1$个球，要么第二个盒子有$q_2$个球，……，要么第 n 个盒子有$q_n$个球当$q_i$都相同时，我们可以得到以下推论

推论：$n(r-1)+1$个球放入个盒子，则至少一个盒子不少于 r 个物体

$n+1$个不超过$2n$的正整数一定存在一个数是另一个数的倍数

证明：将数记成$2^kt$的形式，t 为奇数，由于有 1-2n 个奇数，因此必然有两个数 t 相同

简化版中国剩余定理：n、m 为互素正整数，$a,b$为满足$0\le a<m,0\le b<n$的整数，存在一个正整数 x 使得

$$\begin{aligned}x&\equiv a\mod m\\x&\equiv b\mod n\end{aligned}$$

证明：

证明：只需证明$a,m+a,2m+a,\cdots,(n-1)m+a$这$n$个数中，存在模$n$等于$b$的数.而要证明这个，我们只需证明$km,k=0,1,\cdots,n-1$模$n$各不相同，再由鸽巢原理得到余数分别取到0~n-1的每个数.

### 2.3.7 二项式定理

## 1．二项式定理：

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N^*)$，

## 2．基本概念：

①二项式展开式：右边的多项式叫做$(a+b)^n$的二项展开式.

②二项式系数:展开式中各项的系数$C_n^r \ (r = 0,1,2,\cdots,n)$.

③项数：共$(r+1)$项，是关于$a$与$b$的齐次多项式

④通项：展开式中的第$r+1$项$C_n^r a^{n-r} b^r$叫做二项式展开式的通项. 用$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$表示.

## 3．注意关键点：

①项数：展开式中总共有$(n+1)$项.

②顺序：注意正确选择$a$，$b$，其顺序不能更改. $(a+b)^n$与$(b+a)^n$是不同的.

③指数：$a$的指数从$n$逐项减到$0$，是降幂排列. $b$的指数从$0$逐项减到$n$，是升幂排列. 各项的次数和等于$n$.

④系数:注意正确区分二项式系数与项的系数，二项式系数依次是$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^r, \cdots, C_n^n$. 项的系数是$a$与$b$的系数（包括二项式系数）.

## 4．常用的结论：

令$a=1, b=x$，$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^r x^r + \cdots + C_n^n x^n (n \in N^*)$

令$a=1, b=-x$，$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \cdots + C_n^r x^r + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n (n \in N^*)$

## 5．性质：

①二项式系数的对称性：与首末两端“对距离”的两个二项式系数相等，

即 $C_n^0 = C_n^n$，$\cdots$ $C_n^k = C_n^{k-1}$

②二项式系数和：令 $a=b=1$，则二项式系数的和为 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n$，

变形式 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$.

③奇数项的二项式系数和=偶数项的二项式系数和：

在二项式定理中，令 $a=1, b=-1$，则 $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$，

从而得到：$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{2r} + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{2r+1} + \cdots = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$

④奇数项的系数和与偶数项的系数和：

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \cdots + C_n^n a^0 x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$(x+a)^n = C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n a^n x^0 = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

令 $x=1$，则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n = (a+1)^n$ ----------①

令 $x=-1$，则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n = (a-1)^n$ ----------②

①＋②得，$a_0 + a_2 + a_4 \cdots + a_n = \frac{(a+1)^n + (a-1)^n}{2}$（奇数项的系数和）

①－②得，$a_1 + a_3 + a_5 \cdots + a_n = \frac{(a+1)^n - (a-1)^n}{2}$（偶数项的系数和）

⑤二项式系数的最大项：

如果二项式的幂指数 $n$ 是偶数时，则中间一项的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值.

如果二项式的幂指数 $n$ 是奇数时，则中间两项的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$，$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 同时取得最大值.

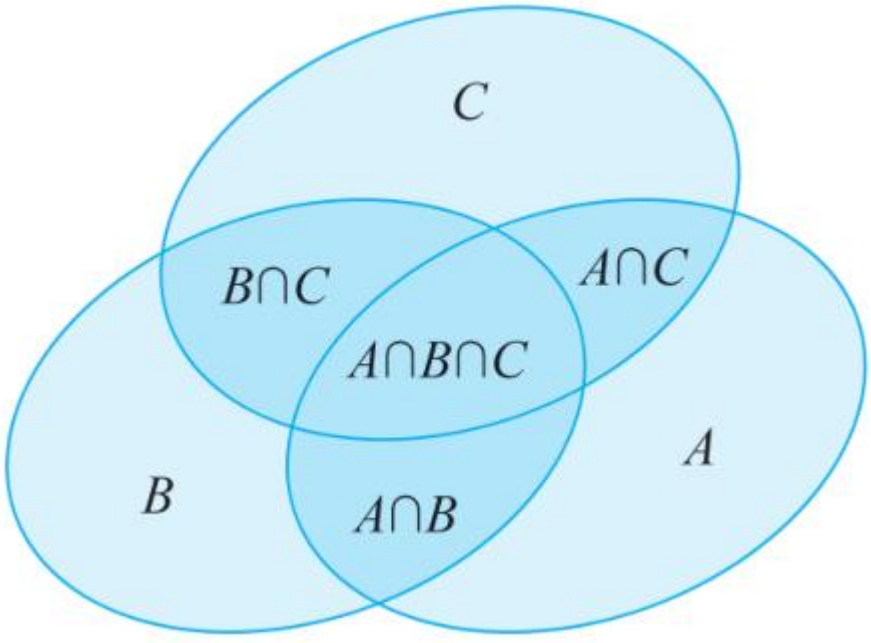
⑥系数的最大项：求 $(a+bx)^n$ 展开式中最大的项，一般采用待定系数法. 设展开式中各项系数分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$，设第 $r+1$ 项系数最大，应有 $\begin{cases} A_{r+1} \geq A_r \\ A_{r+1} \geq A_{r+2} \end{cases}$，从而解出 $r$ 来.

### 2.3.8 容斥原理

容斥原理是一种较常用的计数方法，其基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏，又无重复。

容斥原理核心的计数规则可以记为一句话：奇加偶减。

假设被计数的有 A、B、C 三类，那么，A、B、C 类元素个数总和=A 类元素个数+B 类元素个数+C 类元素个数-既是 A 又是 B 的元素个数-既是 B 又是 C 的元素个数-既是 A 又是 C 的元素个数+既是 A 又是 B 且是 C 的元素个数，即 A∪B∪C=A+B+C-A∩B-B∩C-A∩C+A∩B∩C，如图 11-2 所示。




当被计数的种类被推到 n 类时，其统计规则遵循奇加偶减。

容斥定理最常用于求［a,b］区间与 n 互质的数的个数，该问题可视为求［1,b］区间与 n 互质的个数减去［1,a-1］区间内与 n 互质的个数，故可先对 n 进行因子分解，然后从［1,b］、［1,a-1］区间中减去存在 n 的因子的个数，再根据容斥定理，奇加

偶减，对 n 的因子的最小公倍数的个数进行处理即可。

**常见应用：**

求［a,b］中与 n 互素的个数;求［1,n］中能/不能被 m 个数整除的个数

### 2.3.9 卡特兰（Catalan）数

卡特兰（又译卡塔兰）数，英文名 Catalan number，又称明安图数，是组合数学中一个常出现于各种计数问题中的数列。

$$C_0 = C_1 = 1$$

递归定义：
$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k} \\ &= C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \ldots + C_{n-1} C_0, \text{其中} n \geq 2 \end{aligned}$$

递推公式：$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$

通项公式：$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$

$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2$

应用：合法的括号序列数；凸多边形三角形划分；栈的出栈序列

## 2.4. 线性代数

### 2.4.1 向量与矩阵的概念

#### 2.4.1.1 向量

在数学中，向量（也称为欧几里得向量、几何向量、矢量），指具有大小（magnitude）和方向的量。它可以形象化地表示为带箭头的线段。箭头所指：代表向量的方向；线段长度：代表向量的大小。与向量对应的量叫做数量（物理学中称标量），数量（或

标量）只有大小，没有方向。

### 2.4.1.2 矩阵

由 m × n 个数 aij 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵，简称 m × n 矩阵。记作：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这 m×n 个数称为矩阵 A 的元素，简称为元，数 aij 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 A 的(i,j)元，以数 aij 为(i,j)元的矩阵可记为(aij)或(aij)m × n，m×n 矩阵 A 也记作$A_{m*n}$。

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵。而行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

## 2.4.2 向量的运算

### 2.4.2.1 加法

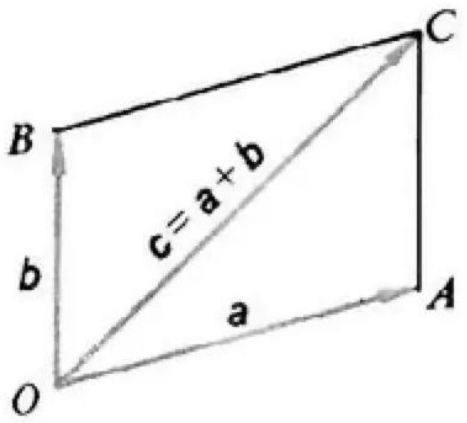
向量的加法满足平行四边形法则和三角形法则。

$$\vec{OB}+\vec{OA}=\vec{OC}$$

$$let\begin{cases} a=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix} \\ b=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$a+b=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

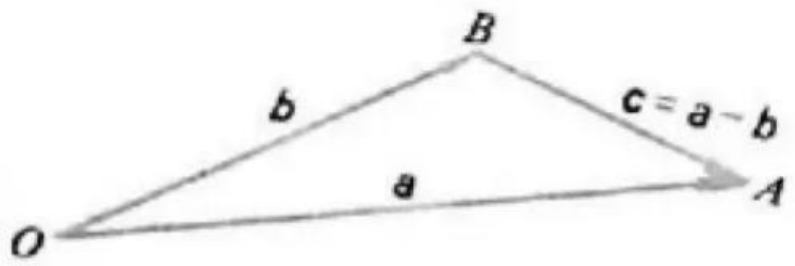
$$a+0=0+a=a$$




交换律：a+b=b+a；结合律：(a+b)+c=a+(b+c)。

### 2.4.2.2 减法

如果 a、b 是互为相反的向量，那么 a=-b，b=-a，a+b=0. 0 的反向量为 0。OA-OB=BA. 即“共同起点，指向被减”。a=(x1,y1)，b=(x2,y2) ，则 a-b=(x1-x2,y1-y2)。如图：c=a-b 以 b 的结束为起点，a 的结束为终点。




### 2.4.2.3 数乘

实数λ和向量 a 的叉乘乘积是一个向量，记作λa，且|λa|=|λ|*|a|。

当λ>0 时，λa 的方向与 a 的方向相同；当λ<0 时，λa 的方向与 a 的方向相反；当λ=0 时，λa=0，方向任意。当 a=0 时，对于任意实数λ，都有λa=0。

注：按定义知，如果λa=0，那么λ=0 或 a=0。

实数λ叫做向量 a 的系数，乘数向量λa 的几何意义就是将表示向量 a 的有向线段伸长

或压缩。

当 |λ| >1 时，表示向量 a 的有向线段在原方向（λ>0）或反方向（λ<0）上伸长为原来的|λ|倍

当|λ|<1 时，表示向量 a 的有向线段在原方向（λ>0）或反方向（λ<0）上缩短为原来的 |λ|倍。

实数 p 和向量 a 的点乘乘积是一个数。

数与向量的乘法满足下面的运算律

结合律：(λa)·b=λ(a·b)=(a·λb)。

向量对于数的分配律（第一分配律）：(λ+μ)a=λa+μa.

数对于向量的分配律（第二分配律）：λ(a+b)=λa+λb.

数乘向量的消去律：① 如果实数λ≠0 且λa=λb，那么 a=b。② 如果 a≠0 且λa=μa，那么λ=μ。

需要注意的是：向量的加减乘（向量没有除法）运算满足实数加减乘运算法则。

$$a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

$$a\times b=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_n\end{bmatrix}$$

### 2.4.3 矩阵的初等变换

初等变换有两类：**初等行变换**和**初等列变换**。

初等行变换有三种：

① 交换矩阵的某两行；

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{交换第一行和第二行}}\begin{bmatrix}2&2&2&2\\1&1&1&1\\4&4&4&4\end{bmatrix}$$

② 用$k(k\neq 0)$乘以某一行；

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{用6}\times\text{第一行}}\begin{bmatrix}6&6&6&6\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{bmatrix}$$

③ 某一行的l倍加到另一行。

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\4&4&4&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{用第一行的}(-4)\text{倍加到第三行}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

同理，初等列变换也有三种，分别对应上述三种，即：

① 交换矩阵的某两列；

② 用$k(k\neq 0)$乘以某一列；

③ 某一列的l倍加到另一列。

### 2.4.3.1 矩阵的运算：加法、减法、乘法与转置

**（1）加法**

矩阵的加法满足下列运算律(A，B，C 都是同型矩阵)：

A+B=B+A　　(A+B)+C=A+(B+C)

应该注意的是只有同型矩阵之间才可以进行加法。

$$\begin{bmatrix}1&4&2\\2&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&5\\7&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0&4+0&2+5\\2+7&0+5&0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&7\\9&5&0\end{bmatrix}$$

**（2）减法**

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\7 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-0 & 4-0 & 2-5\\2-7 & 0-5 & 0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3\\-5 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

**（3）数乘**

矩阵的数乘满足以下运算律：

λ(μA)=μ(λa) λ(μA)=(λμ)A (λ+μ)A=λA+μA λ(A+B)=λA+λB

矩阵的加减法和矩阵的数乘合称矩阵的线性运算。

$$2\cdot\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\4 & -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-3)\\2\cdot 4 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\8 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

**（4）乘法**

两个矩阵的乘法仅当第一个矩阵 A 的列数和另一个矩阵 B 的行数相等时才能定义。如 A 是 m×n 矩阵和 B 是 n×p 矩阵，它们的乘积 C 是一个 m×p 矩阵。

C=(cij)，它的一个元素：

$$\mathbf{c}_{i,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,n}b_{n,j}=\sum_{r=1}^{n}a_{i,r}b_{r,j}$$

并将此乘积记为:C=AB。例如：

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1\times 3+0\times 2+2\times 1) & (1\times 1+0\times 1+2\times 0)\\(-1\times 3+3\times 2+1\times 1) & (-1\times 1+3\times 1+1\times 0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\4 & 2\end{bmatrix}$$

**矩阵的乘法满足以下运算律：**

结合律：(AB)C=A(BC) 左分配律：(A+B)C=AC+BC 右分配律：C(A+B)=CA+CB

矩阵乘法不满足交换律。

### （5）转置

矩阵 A 的行列互换

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置满足以下运算律：

$$(A^T)^T = A$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

### （6）共轭

矩阵的共轭定义为：

$$(A)_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$$

.一个2×2复数矩阵的共轭（实部不变，虚部取负）如下所示

$$A = \begin{bmatrix} 3+i & 5 \\ 2-2i & i \end{bmatrix}$$

则

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3-i & 5 \\ 2+2i & -i \end{bmatrix}$$

### 2.4.4 特殊矩阵的概念：单位阵、三角阵、对称阵和稀疏矩阵

单位阵：对角线全是 1，其余元素全是 0 的元素

三角阵：主对角线以上（下）元素全为 0 的矩阵。

对称阵：满足$A^T = A$的矩阵，即 a[i][j] = a[j][i]

稀疏矩阵：数值为 0 的元素数目远远多于非 0 元素的数目的矩阵

### 2.4.5 高斯消元法

高斯消元是解线性方程组的一种方法，在信息学奥赛中也有着广泛的应用，例如在最小二乘法、线性规划等问题中。

# 三、NOI 级涉及的数学知识

## 3.1. 初等数论

### 3.1.1 原根和指数

### 3.1.2 大步小步（Baby Step Giant Step，BSGS）算法

### 3.1.3 狄利克雷（Dirichlet）卷积

### 3.1.4 二次剩余

### 3.1.5 二次同余式

## 3.2. 离散与组合数学

### 3.2.1 群及其基本性质

### 3.2.2 置换群与循环群

### 3.2.3 母函数

### 3.2.4 莫比乌斯反演

（1）莫比乌斯函数：

含义（三种情况）：拆解一个数$n=P_1^{k1}*P_2^{k2}*P_3^{k3}*\cdots*P_r^{kr}$

①若 n=1,μ(n)=1

②当$k_1=k_2=k_3=\cdots k_r=1$时，$\mu(n)=(-1)^r$

③前面两个条件都不满足时,μ(n)=0。

意义：容斥原理必备，多有使用到的地方，希望考虑一下吧。

（2）莫比乌斯反演：

以下两个条件等价：

①对于任意正整数 n，$f(n)=\Sigma_{d|n}g(d)$

②对于任意正整数 n，$g(n)=\Sigma_{d|n}\mu(d)f(n/d)$

### 3.2.5 Burnside 引理与 Pólya 定理

### 3.2.6 斯特林（Stirling）数

### 3.2.7 无根树的 Prüfer 序列

## 3.3. 线性代数

逆矩阵

行列式

向量空间与线性相关

## 3.4. 高等数学

多项式函数的微分

多项式函数的积分

泰勒（Taylor）级数

快速傅里叶变换

## 3.5. 概率论

概率的基本概念

随机变量的期望与方差

条件概率

贝叶斯公式

## 3.6. 博弈论

尼姆（Nim）博弈

SG 函数

## 3.7. 最优化

单纯形法

## 3.8. 计算几何

点、线、面之间位置关系的判定

一般图形面积的计算

二维凸包

半平面交

## 3.9. 信息论

熵、互信息、条件熵、相对熵

## 3.10. 其他

信息复杂度的概念

描述复杂度的概念

通讯复杂度的概念